ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

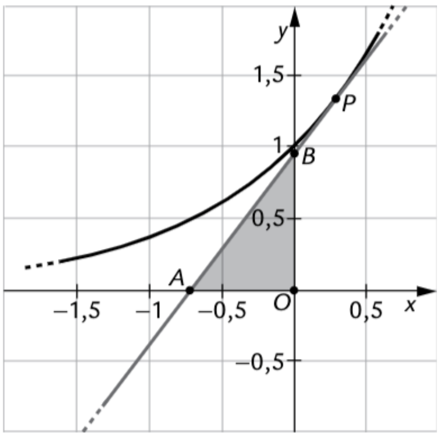
SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA

Indirizzo: LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

Problema 1



In figura è mostrato il grafico della funzione $f(x) = e^x$, con la sua retta tangente in un punto P di ascissa $k \in R$. I punti A e B sono le intersezioni della retta tangente con gli assi.

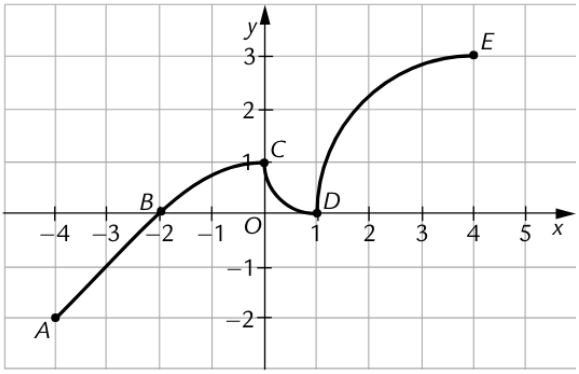
1. Per quale valore di *k* la tangente passa per l'origine?
   Di conseguenza, stabilisci per quali valori di *k* il triangolo OAB occupa il secondo quadrante e per quali valori di *k* esso occupa il quarto quadrante.

2. Determina l'espressione della funzione $a = a(k)$ che fornisce il valore dell'area del triangolo OAB, al variare di *k*.
   Studia la funzione ottenuta fino a tracciarne il grafico, spiegando in particolare se essa ammette:
   - asintoti;
   - massimi o minimi relativi o assoluti;
   - flessi.

3 Mostra che l'area compresa tra il grafico della funzione $a(k)$ e l'asse delle ascisse, per valori di *k* minori o uguali dell'unico zero della funzione, assume un valore finito, che ti è richiesto di calcolare.

4 Traccia un grafico qualitativo della funzione $f(k) = \frac{1}{a(k)}$ motivando opportunamente le tue scelte.

Problema 2



In figura è mostrato il grafico di una funzione $y = f(x)$, definita nell'intervallo $[-4, 4]$. La curva è composta dai seguenti quattro tratti:

- AB, un segmento di retta;
- BC, un arco di parabola, con vertice in C;
- CD, un quarto di circonferenza;
- DE, un quarto di circonferenza.

1. Scrivi l'espressione analitica della funzione e studia la sua derivabilità, con particolare riferimento a quanto si verifica nei punti di raccordo tra i vari tratti sopra elencati e negli estremi della curva: fornisci giustificazioni grafiche e analitiche. Individua i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della funzione.
2. Traccia un grafico qualitativo della funzione $y = f'(x)$, motivando opportunamente le tue scelte.

3. Si consideri la funzione definita nell'intervallo $[-2;\ 0]$. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h. Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.

4. Sia S la regione limitata del primo quadrante, compresa tra il grafico della funzione h e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Quesiti

1. Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+4} \quad + hx & per\ x < 0 \\ \dfrac{k-x}{x^2+1} & per\ x \geq 0 \end{cases}$$

dove h e k sono parametri reali.
Determina h e k in modo che si possa applicare alla funzione *f* il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.
Considerata la funzione che corrisponde ai valori di h e k trovati, determina tutti i suoi eventuali asintoti (verticali, orizzontali o obliqui)

2. Data la funzione $f(x) = e^x + ln(x+1)$, dimostra che essa è invertibile nel suo dominio. Dopo aver dimostrato che la funzione inversa interseca l'asse x nel punto (1,0) scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa $g(x) = f^{-1}(x)$ nel punto in cui il grafico di g interseca l'asse *x*.

3. Dato un quadrato ABCD, considera un punto P sul lato CD. Indica con Q il punto in cui la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}\,P$ interseca il lato CB. Dimostra che $\overline{BQ} + \overline{DP} = \overline{AP}$.

4. Considera un rettangolo inscritto in un semicerchio di diametro AB e raggio r. Stabilisci se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: «il cilindro che si ottiene da una rotazione completa del rettangolo intorno al diametro AB ha volume massimo quando il rettangolo ha area massima».

5. Data la funzione $f\,(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$, determina i valori dei parametri a, b, c in modo che il suo grafico presenti un punto stazionario di coordinate $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$e intersechi l'asse *x* in (3, 0). Verificato che $a = -1, b = 3$, $c = 16$, determina i punti di estremo relativo della funzione corrispondente e stabilisci se l'area della regione di piano contenuta nel secondo quadrante, limitata dal grafico di *f* e dall'asse x, è finita o infinita.

6. In un ciclo di marea, osservato nella Laguna di Venezia, che si è iniziato a monitorare a partire dalla mezzanotte, l'altezza minima dell'acqua si è registrata alle 5 del mattino ed è stata di 40 cm, mentre l'altezza massima è stata di $140\ cm$. Il ciclo si è ripetuto, con gli stessi valori di alta e bassa marea, ogni 12 ore e 30 minuti per due giorni.

a. Considera la funzione $y = A\,sin(\omega t + \varphi) + B$, con $A > 0\ e\ \omega > 0$, dove *y* è il livello dell'acqua (in cm) e *t* è il tempo (in ore) trascorso dalla mezzanotte; determina i coefficienti *A, B, ω, φ,* in modo che la funzione rappresenti l'andamento di marea descritto.
b. Considera il primo ciclo di marea osservato. Determina con quale velocità sta variando l'altezza dell'acqua alle 9:10 del mattino.

7. Dato il piano $\alpha: x - 2y - 2z - 2 = 0$, determina l'equazione del piano β, parallelo a α e passante per il punto di coordinate $(6, -2, 3)$. Determina l'equazione della superficie sferica tangente ai piani α e β e avente il centro sulla retta *r* di equazioni parametriche: $x = 2 - t, y = -1 + t, z = 1 - t$.

8. Paolo gioca 6 volte alla roulette americana, puntando sul rosso. In questo tipo di roulette, oltre alle caselle numerate da 1 a 36 (alternativamente rosse o nere), sono presenti una casella con lo zero e una con il doppio zero (entrambe di colore verde).

a. Qual è la probabilità che Paolo vinca per la prima volta alla terza giocata?
b. Qual è la probabilità che Paolo vinca almeno due volte?
c. Sapendo che Paolo ha vinto in tutto quattro volte, qual è la probabilità che abbia vinto nell'ultima giocata, cioè nella sesta?