

ESAME DI STATO DI ISTRUZIONE SECONDARIA SUPERIORE

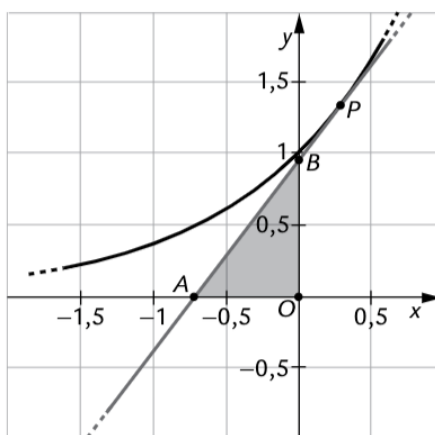
SIMULAZIONE SECONDA PROVA SCRITTA

Indirizzo: LI03 - SCIENTIFICO - OPZIONE SCIENZE APPLICATE

Tema di: MATEMATICA

Il candidato risolva uno dei due problemi e risponda a 4 quesiti.

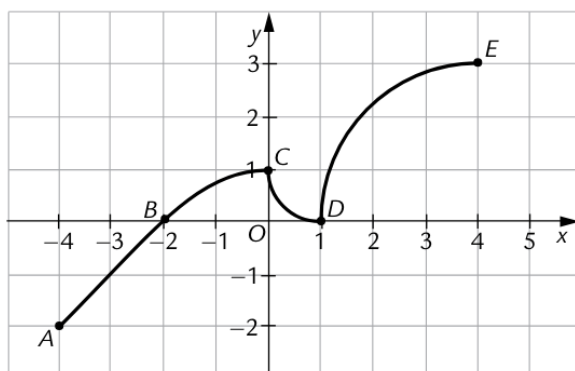
Problema 1



In figura è mostrato il grafico della funzione $f(x) = e^x$, con la sua retta tangente in un punto P di ascissa $k \in \mathbb{R}$. I punti A e B sono le intersezioni della retta tangente con gli assi.

1. Per quale valore di k la tangente passa per l'origine?
Di conseguenza, stabilisci per quali valori di k il triangolo OAB occupa il secondo quadrante e per quali valori di k esso occupa il quarto quadrante.
2. Determina l'espressione della funzione $a = a(k)$ che fornisce il valore dell'area del triangolo OAB , al variare di k .
Studia la funzione ottenuta fino a tracciarne il grafico, spiegando in particolare se essa ammette:
 - asintoti;
 - massimi o minimi relativi o assoluti;
 - flessi.
3. Traccia un grafico qualitativo della funzione $a = \frac{1}{a(k)}$ motivando opportunamente le tue scelte.
4. Mostra che l'area compresa tra il grafico della funzione $a(k)$ e l'asse delle ascisse, per valori di k minori o uguali dell'unico zero della funzione, assume un valore finito, che ti è richiesto di calcolare.

Problema 2



In figura è mostrato il grafico di una funzione $y = f(x)$, definita nell'intervallo $[-4, 4]$. La curva è composta dai seguenti quattro tratti:

- AB, un segmento di retta;
- BC, un arco di parabola, con vertice in C;
- CD, un quarto di circonferenza;
- DE, un quarto di circonferenza.

1. Scrivi l'espressione analitica della funzione e studia la sua derivabilità, con particolare riferimento a quanto si verifica nei punti di raccordo tra i vari tratti sopra elencati e negli estremi della curva: fornisci giustificazioni grafiche e analitiche. Individua i punti di massimo e di minimo relativi e assoluti della funzione.
2. Traccia un grafico qualitativo della funzione $y = f'(x)$, motivando opportunamente le tue scelte.
3. Si consideri la funzione definita nell'intervallo $[-2; 0]$. Spiegare perché essa è invertibile e scrivere l'espressione analitica della sua funzione inversa h . Studiare la derivabilità di h e tracciarne il grafico.
4. Sia S la regione limitata del quarto quadrante, compresa tra il grafico della funzione h e gli assi cartesiani. Determinare il valore del parametro reale k affinché la retta di equazione $x = k$ divida S in due regioni equivalenti.

Quesiti

1. Considera la funzione:

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} + hx & \text{per } x < 0 \\ \frac{k - x}{x^2 + 1} & \text{per } x \geq 0 \end{cases}$$

dove h e k sono parametri reali.

Determina h e k in modo che si possa applicare alla funzione f il teorema di Lagrange nell'intervallo $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

Considerata la funzione che corrisponde ai valori di h e k trovati, determina tutti i suoi eventuali asintoti (verticali, orizzontali o obliqui)

2. Data la funzione $f(x) = e^x + \ln(x + 1)$, dimostra che essa è invertibile nel suo dominio. Dopo aver dimostrato che la funzione inversa interseca l'asse x nel punto $(1, 0)$ scrivi l'equazione della retta tangente al grafico della funzione inversa $g(x) = f^{-1}(x)$ nel punto in cui il grafico di g interseca l'asse x .
3. Dato un quadrato $ABCD$, considera un punto P sul lato CD . Indica con Q il punto in cui la bisettrice dell'angolo $B\hat{A}P$ interseca il lato CB . Dimostra che $\overline{BQ} + \overline{DP} = \overline{AP}$.
4. Considera un rettangolo inscritto in un semicerchio di diametro AB e raggio r . Stabilisci se la seguente affermazione è vera o falsa, giustificando la risposta: «il cilindro che si ottiene da una rotazione completa del rettangolo intorno al diametro AB ha volume massimo quando il rettangolo ha area massima».
5. Data la funzione $f(x) = \frac{ax+b}{x^2+c}$, determina i valori dei parametri a , b , c in modo che il suo grafico presenti un punto stazionario di coordinate $\left(-2, \frac{1}{4}\right)$ e intersechi l'asse x in $(3, 0)$. Verificato che $a = -1$, $b = 3$, $c = 16$, determina i punti di estremo relativo della funzione corrispondente e stabilisci se l'area della regione di piano contenuta nel secondo quadrante, limitata dal grafico di f e dall'asse x , è finita o infinita.
6. In un ciclo di marea, osservato nella Laguna di Venezia, che si è iniziato a monitorare a partire dalla mezzanotte, l'altezza minima dell'acqua si è registrata alle 5 del mattino ed è stata di 40 cm, mentre l'altezza massima è stata di 140 cm. Il ciclo si è ripetuto, con gli stessi valori di alta e bassa marea, ogni 12 ore e 30 minuti per due giorni.
- Considera la funzione $y = A \sin(\omega t + \varphi) + B$, con $A > 0$ e $\omega > 0$, dove y è il livello dell'acqua (in cm) e t è il tempo (in ore) trascorso dalla mezzanotte; determina i coefficienti A , B , ω , φ , in modo che la funzione rappresenti l'andamento di marea descritto.
 - Considera il primo ciclo di marea osservato. Determina con quale velocità sta variando l'altezza dell'acqua alle 9:10 del mattino.
7. Dato il piano $\alpha: x - 2y - 2z - 2 = 0$, determina l'equazione del piano β , parallelo a α e passante per il punto di coordinate $(6, -2, 3)$. Determina l'equazione della superficie sferica tangente ai piani α e β e avente il centro sulla retta r di equazioni parametriche: $x = 2 - t, y = -1 + t, z = 1 - t$.
8. Paolo gioca 6 volte alla roulette americana, puntando sul rosso. In questo tipo di roulette, oltre alle caselle numerate da 1 a 36 (alternativamente rosse o nere), sono presenti una casella con lo zero e una con il doppio zero (entrambe di colore verde).
- Qual è la probabilità che Paolo vinca per la prima volta alla terza giocata?
 - Qual è la probabilità che Paolo vinca almeno due volte?
 - Sapendo che Paolo ha vinto in tutto quattro volte, qual è la probabilità che abbia vinto nell'ultima giocata, cioè nella sesta?